Primitives – Intégration

Introduction

Le formulaire des primitives contient une liste des plus usuelles. Il est donc obligatoire de le connaître. Le contenu du chapitre permet d'aborder des intégrales jugées au premier abord plus difficiles. Le programme de Deug SV correspond au premier niveau de lecture de ce cours. Pour ceux qui voudrait aller plus loin, vous trouverez au travers de nombreux liens, matière à vous satisfaire.

1 Primitives

1.1 Définitions - Théorème fondamental

Définition (primitive sur un intervalle) :

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I , et si $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

Exemple :

Proposition (primitives d'une même fonction) :

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admettant une primitive F sur I La fonction $G : I \to \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f sur I si et seulement si il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I : F(x) = G(x) + C$.

Remarque : Une fonction ne peut pas avoir une seule primitive ; il est donc « interdit » de parler de *la* primitive d'une fonction.

Exemple :

Conséquence (primitive prenant une valeur donnée en un point) :

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admettant une primitive sur I . Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Il n'existe qu'une seule primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$;

Théorème fondamental : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction **continue**, alors elle admet une primitive (*donc une infinité*).

1.2 Primitives des fonctions usuelles

Le formulaire des primitives vous propose une liste de primitives des fonctions usuelles, qu'il est impératif de connaître par cœur.

Tableau des primitives usuelles

fonction f	primitive F	Intervalle
k (réel)	k x	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$)	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*+$
$\frac{1}{x}$	ln (|x|)	$\mathbb{R}^*$
$e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)	$\frac{e^{\alpha.x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
sin x	- cos x	$\mathbb{R}$
cos x	sin x	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	tan x	$]-\frac{\pi}{2}+k.\pi;\frac{\pi}{2}+k.\pi[$
sh x	ch x	$\mathbb{R}$
ch x	sh x	$\mathbb{R}$
$1-th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$	th x	$\mathbb{R}$
$\sin x.\cos^n x$	$-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\cos x.\sin^n x$	$\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$	$\mathbb{R}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I

$u' . u^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	
$u' . u^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u(x) > 0$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{u^n} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 2)$	$-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0$
$u' e^u$	e^u	

__Exemples :__

1.3 Linéarité

Proposition1 : Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et admettant des primitives. Si F est une primitive de f et G une primitive de g, alors, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha F + \beta G$ est une primitive sur I de la fonction $\alpha f + \beta g$.

__Exemple :__

***Proposition* 2:** Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I, et g une fonction définie sur intervalle J tel que $\forall x \in I : u(x) \in J$.

Si g admet une primitive G sur J, alors une primitive sur I de la fonction définie par $f(x) = u'(x) g(u(x))$ est la fonction F définie par $F(x) = G(u(x))$.

__Exemple :__

2 La notion d'intégrale

2.1 Intégrale d'une fonction : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive sur I.

Soient F et G deux primitives de f sur I. Alors, $\forall x \in I : G(x) = F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\forall a, b \in I : G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$.

Ce nombre est donc indépendant du choix de la primitive.

***Définition 1* :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive sur I et F l'une d'entre elles.

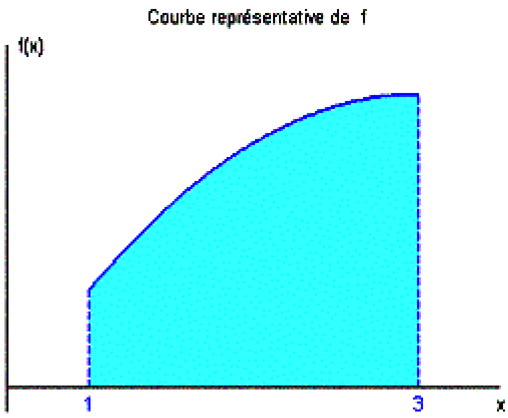
Soient $a, b \in I$. Alors le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé **intégrale** de f sur $[a, b]$.

Remarque : On peut remarquer que $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F parmi l'infinité des primitives de f .

Interprétation géométrique

Considérons la fonction f définie sur $[a, b] = [1, 3]$ par $f(x) = x^2 + 6x - 3$.

Voici la courbe représentative de f :

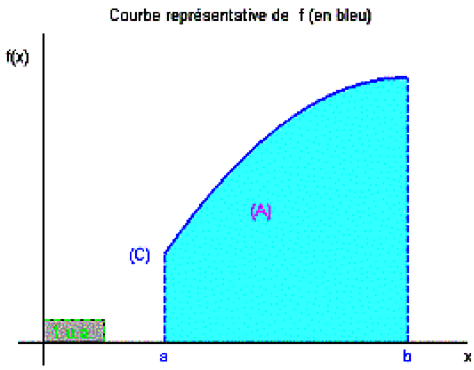


Définition 2 (Intégrale et Aire) :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction **positive** admettant une primitive sur $[a, b]$ et (C) sa courbe représentative.

L'aire du domaine (A) délimitée par :

- la courbe (C)
- l'axe des abscisses
- les droites d'équations $x = a$ et $x = b$



Est $(\mathrm{A}) = \int_a^b f(x)dx$, exprimée en unités d'aire (u.a.). *Voir figure ci-dessous.*

Exemple :

***Définition 3* :**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive sur I et F l'une d'entre elles.

L'intégrale de f sur $[a,b]$ (*définition 1*) se note $\int_a^b f(x)dx$. Ainsi : $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$ que l'on note aussi $\left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

Conséquences des définitions 1 et 3 :

(i) $\int_a^a f(x)dx = 0$ (ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Exemple :

2.2 Intégrale et primitive

Définition 4 **:** Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admettant des primitives sur I .

On note $\int f(x)dx$ l'ensemble des primitives de f .

Exemple :

Proposition **:** Soient une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admettant des primitives sur I et $x_0 \in I$.

La fonction F définie sur I par l'intégrale $F(x)=\int_{x_0}^x f(t)dt$ est **l'unique** primitive de f sur I qui s'annule en x_0 .

Exemple :

2.3 Premières propriétés

2.3.1 Linéarité

Proposition **:** Soients f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} : \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

Remarque : On dit que l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales.

Exemple :

2.3.2 Signe de l'intégrale

Propositions **:**

(i) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Si $\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0$ (resp. $f(x) \leq 0$), alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (resp. $\int_a^b f(x)dx \leq 0$).

(ii) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x)$, alors : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Exemple :

2.3.3 Relation de Chasles

Proposition **:**Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors

$\forall c \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Exemple : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = ...$

3 Intégrales et inégalités

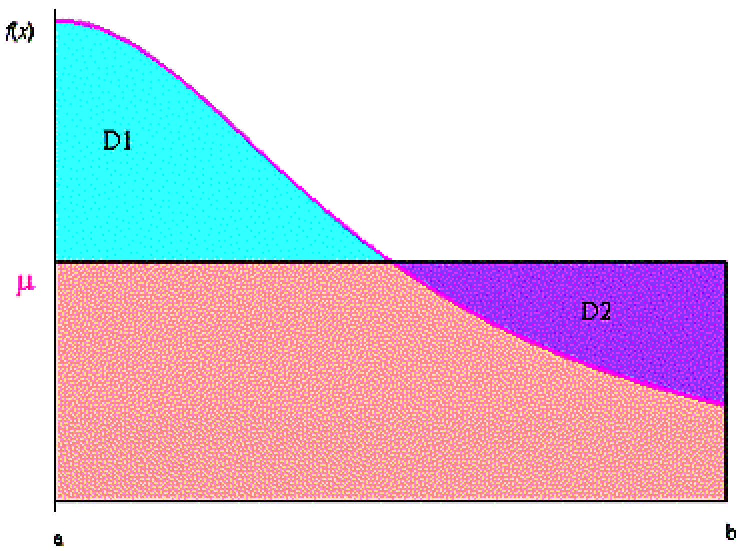
3.1 Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Définition **:** Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On appelle **valeur moyenne de** f sur $[a,b]$, le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Interprétation graphique :

Dans le cas d'une fonction positive, la valeur moyenne d'une fonction est le réel μ tel que l'aire du rectangle de hauteur μ et de base (b-a) (rose + violet) soit égal à l'aire sous la courbe (**rose** + **bleu**).

Les aires des domaines D1 (**bleu**) et D2 (**violet**) sont identiques.



Théorème (théorème de la moyenne) :Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f'(c)$

3.2 Inégalités de la moyenne

Propositions **:** Soit f une fonction admettant des primitives sur $[a,b]$.

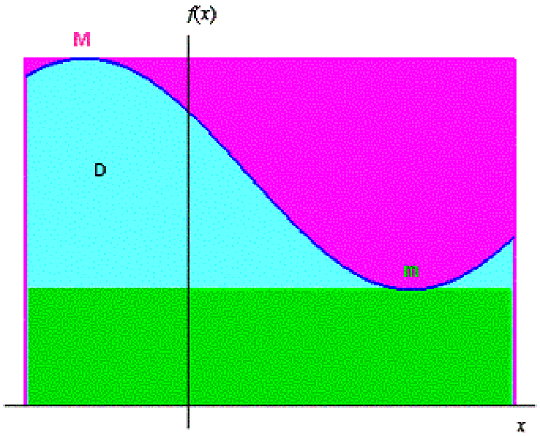
(i) Si $m \le f \le M$, alors $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

(ii) Si $|f| \le M$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M|b-a|$.

Interprétation graphique :

Voir figure ci-dessous

Dans le cas d'une fonction positive sur $[a,b]$ et $m>0$, l'inégalité de la moyenne (i) traduit le fait que l'aire du domaine D (+) comprise entre l'aire du rectangle de hauteur **m** et de base (b – a) ( ), et l'aire du rectangle de hauteur **M** et de même base ( ).



Remarque :

L'inégalité de la moyenne (i) correspond en fait à l'inégalité des accroissements finis appliquée à l'intégrale fonction de sa borne supérieure, définie par $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

3.3 Valeur absolue d'une intégrale

***Proposition* :**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On a alors : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

4 Méthodes de calcul exact d'intégrales

4.1 Utilisation des primitives usuelles

Le plus souvent le calcul d'une intégrale se ramène à la recherche d'une primitive.

Ainsi, le calcul de $\int_a^b f(x)dx$ revient généralement à justifier l'existence d'une primitive F de f sur $[a,b]$, puis à calculer F à l'aide du tableau des primitives usuelles ; on a alors immédiatement.

Exemple : Calculer $\int_{-1}^{2} x e^{\frac{x^2}{2}} dx$.

4.2 Intégration par décomposition en somme (linéarisation)

On a vu précédemment que : $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$

Exemple: Calculer $\int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$.

4.3 Changement de variable

***Théorème* :**

Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 (continue et à dérivée première continue) strictement monotone et $f : [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Alors :
$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt$ avec $x = \varphi(t)$ et $dx = \varphi'(t) dt$.

Remarque 1 :

Dans le théorème précédent, on a $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$, c'est-à-dire que φ est bijective de $[a,b]$ sur $[\varphi(a), \varphi(b)]$.

Remarque 2 :

Si F est une primitive de f , alors on peut écrire :

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = [(F \circ \varphi)(t)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

Exemple : Calculer $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$.

4.4 Conséquences

- Si $\int f(x) dx = F(x) + C$, alors $\int f(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x) + C$ avec $\alpha \neq 0$
- f paire $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
- f impaire $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$
- $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(x), \cos(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(t), \sin(t)) dt$.

En effet, le remplacement de $\sin(x)$ par $\cos(x)$ ne change pas l'intégrale entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ d'une fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$. Le changement de variable correspondant est $x=\frac{\pi}{2}-t$.

En particulier, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)dt$.

- f T -périodique $\Rightarrow \int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$ ou bien encore $\int_a^{b+T} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

Exemples :

(1) $\int_{-1}^{1}\left(x^4+x^2-1\right)dx=$................

(2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin(2x)dx=$.................

4.5 Cas des fractions rationnelles

Définition **:**

Une fraction rationnelle se présente sous la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Sauf cas particuliers (*qui confirment que la première méthode à essayer doit toujours être le changement de variable*), par exemple : $\int\frac{3x^2+2x-1}{x^3+x^2-x}dx=$.......

L'intégration des fractions rationnelles nécessite la décomposition de la fraction en éléments simples. Cette dernière repose sur la connaissance des racines des polynômes P et Q .

4.5.1 Décomposition en éléments simples

Si $d^\circ(Q)\le d^\circ(P)$, on peut effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ suivant les puissances décroissantes pour faire apparaître une partie entière, qui est un polynôme en x , et une nouvelle fraction rationnelle $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ où $d^\circ(Q)\ge d^\circ(P_1)$.

On effectue dans ce cas une décomposition en éléments simples de $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Exemple : Calculer $\int \frac{3x+1}{x^2-1}dx = ...$

4.6 Intégrations par parties

Si l'intégrale cherchée ne peut pas être obtenue par utilisation d'une primitive usuelle, il peut être commode de la transformer en une ou plusieurs autres intégrales que l'on sait calculer.

4.6.1 Intégration par parties

***Proposition* :**

Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions dérivables sur un même intervalle $[a,b]$ et f une fonction continue su $[a,b]$ telle que $f(x)=u(x)v'(x)$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exemples : Calculer $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = ...$

Calculer $\int_1^2 x^2 \ln(x)dx = ...$

Calculer $\int_0^\pi (x+2)\sin(x)dx = ...$

4.6.2 Intégration par parties successives

Exemple

Calculer $\int_{-1}^0 x^2\sqrt{1-x}\,dx = ...$

4.7 Cas des fonctions de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ avec $P(x)$ polynôme

On cherche ici à calculer $F(x) = \int P(x)e^{\alpha x}dx$

Lorsque le degré de P est petit, on peut utiliser des intégrations par parties successives (en nombre égal au degré de P), en posant $u(x) = P(x)$.

Par contre, si le degré de P est élevé, il est recommandé d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, c'est-à-dire que l'on cherche $F(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ avec $\deg P = \deg Q$.

Exemple 29 : Calculer $\int_{-1}^0 (x^3-2x+1)e^{-x}dx = ...$